ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические рекомендации для экспертов территориальных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ выпускников IX классов общеобразовательных учреждений

Государственная (итоговая) аттестация выпускников IX классов общеобразовательных учреждений (в новой форме)

2011 год

МАТЕМАТИКА

Москва
2011

Составители: Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, Л.О. Рослова

Повышение объективности результатов государственной (итоговой) аттестации выпускников 9 классов общеобразовательных учреждений (в новой форме) во многом определяется качеством экспертной проверки территориальными предметными комиссиями выполнения заданий с развернутым ответом. Рекомендации по формированию и организации работы предметных комиссий (подкомиссий) территориальной экзаменационной комиссии субъекта Российской Федерации, создаваемых для организации оценивания экзаменационных работ в рамках государственной (итоговой) аттестации обучающихся, освоивших образовательные программы основного общего образования (приложение 3 к письму Рособрнадзора от 29.02.2008 № 01-96/08-01), содержат положение о том, что «Территориальные предметные комиссии в своей работе руководствуются… рекомендациями и инструкциями уполномоченной организации, осуществляющей по поручению Рособрнадзора разработку экзаменационных заданий по проверке и оцениванию экзаменационных работ обучающихся, освоивших образовательные программы основного общего образования». На практике это означает необходимость ознакомления экспертов территориальных предметных комиссий с общими подходами к проверке и оценке экзаменационных работ, а также определенной тренировки для обучения их приемам работы с системой оценивания экзаменационной работы по предмету. Это позволит обеспечить «соблюдение процедуры проверки экзаменационных работ обучающихся» и повысить надежность результатов.

С этой целью специалистами Федерального института педагогических измерений подготовлены методические пособия для организации подготовки экспертов территориальных предметных комиссий, подкомиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом в 2011 г. Пособие по предмету включает в себя характеристику экзаменационной работы, подходы к проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом, примеры ответов учащихся с комментариями к оценке этих ответов, а также материалы для самостоятельной работы эксперта.

Авторы будут благодарны за предложения по совершенствованию пособия.

Содержание

1. Характеристика экзаменационной работы 2011 года для государственной (итоговой) аттестации выпускников 9 классов общеобразовательных учреждений (в новой форме). Назначение заданий с развернутым ответом и их особенности

Содержание экзаменационных заданий по алгебре находится в рамках содержания образования, обозначенного «Федеральным компонентом государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование» (Приказ Минобразования России от 05.03.2004 №1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»).

В 2011 г. общие подходы к составлению экзаменационной работы остаются такими же, как и в предыдущие годы. Отличие экзаменационной работы 2011 года заключается в том, что в ее первую часть добавлены 2 задания, относящиеся к разделу *элементы статистики и теории вероятностей.*

Работа состоит из двух частей. *Часть* 1 направлена на проверку овладения содержанием курса на уровне базовой подготовки. Она содержит 18 заданий, в совокупности охватывающих следующие разделы курса: *числа*, *буквенные выражения*, *преобразования алгебраических выражений*, *уравнения*, *неравенства*, *последовательности и прогрессии*, *функции и графики*, *элементы статистики и теории вероятностей*. Эта часть работы содержит 8 заданий с выбором ответа, 9 заданий с кратким ответом, задание на соотнесение. Задания расположены группами в соответствии с разделами содержания, к которым они относятся.

В первой части работы проверяется владение базовыми алгоритмами, знание и понимание важных элементов содержания (понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), умение применить знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применение знаний в простейших практических ситуациях. При выполнении заданий первой части учащиеся должны продемонстрировать умение пользоваться различными математическими языками, определенную системность знаний и широту представлений.

Часть 2 направлена на проверку владения материалом на повышенном уровне. Основное ее назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки. В этой части работы содержится 5 заданий с развернутым ответом (с записью решения) разного уровня сложности. Все пять заданий представляют разные разделы содержания. Каждое из них относится к одному из следующих семи разделов: *выражения и их преобразования*; *уравнения*; *неравенства*; *функции*; *координаты и графики*; *арифметическая и геометрическая прогрессии*; *текстовые задачи*.

Все задания этой части носят комплексный характер. Они позволяют проверить владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом, способность к интеграции знаний из различных тем школьного курса, владение достаточно широким набором приемов и способов рассуждений, а также умение математически грамотно записать решение.

Задания во второй части расположены по нарастанию сложности – от относительно простой задачи до задач достаточно сложных, требующих свободного владения материалом курса и высокого уровня математического развития. Фактически во второй части работы представлены три разных уровня. Первое задание (задание 19 в экзаменационной работе), самое простое. Как правило, оно направлено на проверку владения формально-оперативными навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, системы, построение графика. По уровню сложности это задание лишь немногим превышает обязательный уровень.

Следующие два задания (задания 20 и 21 экзаменационной работы) более высокого уровня, они сложнее первого и в техническом, и в логическом отношении. При хорошем выполнении первой части правильное решение этих заданий уже обеспечивает получение «пятерки».

И, наконец, последние два задания (задания 22 и 23) – наиболее сложные, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на выпускников, изучавших математику более основательно, чем в рамках пятичасового курса, – это, например, углубленный курс математики, элективные курсы в ходе предпрофильной подготовки, математические кружки и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, при их выполнении выпускник должен продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований, решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера.

2. Оценивание выполнения заданий с развернутым ответом

2.1. Общие подходы к формированию критериев оценивания.

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение ученика удовлетворяет этим требованиям, то ему выставляется полный балл, которым оценивается это задание: № 19 – 2 балла, № 20 и 21 – 3 балла, № 22 и 23 – 4 балла. Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного.

В критериях оценивания по каждому конкретному заданию второй части экзаменационной работы эти общие позиции конкретизируются и пополняются с учетом содержания задания. Критерии разработаны применительно к одному из возможных решений, а именно, к тому, которое описано в рекомендациях. При наличии в работах учащихся других решений критерии вырабатываются предметной комиссией с учетом описанного общего подхода. Решения учащихся могут содержать недочеты, не отраженные в критериях, но которые, тем не менее, позволяют оценить результат выполнения задания положительно (со снятием одного балла). В подобных случаях решение о том, как квалифицировать такой недочет, принимает предметная комиссия.

2.2. Критерии проверки и оценки выполнения заданий с развернутым ответом

Задание 19

1. *Разложите на множители*: x^2y+1-x^2-y.

Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

Решение. $x^2y+1-x^2-y = x^2(y-1)-(y-1) = (y-1)(x^2-1) = (y-1)(x-1)(x+1)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно и до конца (получено три множителя) выполнено разложение на множители.
1	Ход решения верный, не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца (выражение представлено в виде произведения двух множителей).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибка в знаках при группировке слагаемых считается существенной, при ее наличии решение не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№19. $x^2y+1-x^2-y = x^2y-x^2+1-y = x^2(y-1)-1(y-1) = (x^2-1)(y-1)$

За решение выставляется 1 балл, так как оно не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца.

Пример 2.

19. $x^2y+1-x^2-y = x^2(y-1)+1-y =$ $=(y-1)(x^2+1)$

За решение выставляется 0 баллов; допущена ошибка в знаках при группировке слагаемых (см. комментарий к критериям).

2. *Сократите дробь* $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{x}$.

Решение. Корни квадратного трехчлена $5x^2-3x-2$: $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{2}{5}$. Имеем

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)}=\frac{x-1}{x}.$$

Замечание. Учащийся может разложить трехчлен на множители каким-либо иным способом. Например: $5x^2-3x-2=(3x^2-3x)+(2x^2-2)=3x(x-1)+2(x^2-1)=$ $=(x-1)(5x+2)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнено разложение на множители числителя и знаменателя дроби, получен верный ответ.
1	Допущена описка или ошибка вычислительного характера при нахождении корней квадратного трехчлена, но разложение его на множители с учетом этой ошибки выполнено верно, решение при этом может оказаться не доведенным до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям

Комментарий. Учащиеся не обязаны указывать область определения сокращаемой дроби.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

19) $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\dfrac{\cancel{5}(x-1)\cancel{(x+0,4)}}{\cancel{5}x\cancel{(x+0,4)}}=\dfrac{x-1}{x}$ $5x^2-3x-2=0$; $D=9+40=49$; $x=\dfrac{3\pm7}{10}$; $x_1=1$; $x_2=-0,4$;

За решение выставляется 2 балла. Все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.

Пример 2.

1) $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \dfrac{5(x-1)(x+0,4)}{5x^2+2x} = \dfrac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} =$

$= \dfrac{x-1}{x}$

О.Д.З.
$5x+2 \neq 0$
$x \neq -\dfrac{2}{5}$

Сокращение дроби выполнено верно. Но так как при указании ОДЗ допущена ошибка (хотя нахождение области определения дроби в данном случае не требуется), за решение выставляется 1 балл.

Задания 20 и 21

1. *Решите неравенство* $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0.$

Ответ: $(-\infty;\,1,5).$ Другая возможная форма ответа: $x<1,5.$

Решение. 1. Определим знак разности $\sqrt{3}-1,5.$ Так как $1,5=\sqrt{2,25}$ и $\sqrt{3}>\sqrt{2,25},$ то $\sqrt{3}-1,5>0.$

2. Получаем неравенство $3-2x>0.$ Отсюда $x<1,5.$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ.
2	Ход решения верный, правильно выполнен первый шаг, но при решении линейного неравенства допущена вычислительная ошибка или описка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

20. $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$

$\sqrt{3}-1,5>0$

$3-2x>0$

$-2x>-3$

$x<-\dfrac{3}{2}$

$x<-1,5$

Ответ: $x\in(-\infty;-1,5)$

Допущена ошибка вычислительного характера на последнем шаге решения. Оценка снижается на 1 балл, за решение выставляется 2 балла.
Замечание. Можно не требовать дополнительных пояснений в предъявленной цепочке выкладок, так как, по всей видимости, учащийся знает, что $\sqrt{3} \approx 1,7$, и для него очевидно, что $\sqrt{3} - 1,5 > 0$.

Пример 2

20. $(\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$
$\sqrt{3} \approx 1,7$, $\sqrt{3} > 1,5$
$3 - 2x > 0$
$-2x > -3$
$x > 1,5$ Ответ: $(1,5; +\infty)$

Допущена ошибка принципиального характера в алгоритме решения неравенства. За решение выставляется 0 баллов.

2. *Постройте график функции* $y = f(x)$ *, где*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 3, \ \text{если} \ x < 3, \\ -x + 7, \ \text{если} \ x \geq 3. \end{cases}$$

При каких значениях x функция принимает значения, меньшие 2?
Ответ: график изображен на рисунке 1; $f(x) < 2$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.

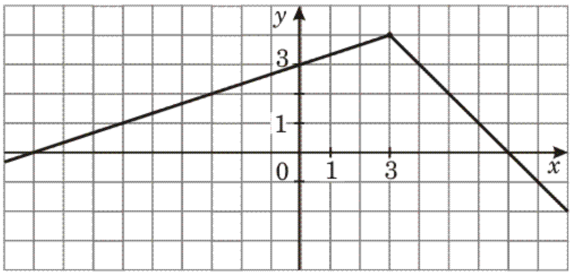


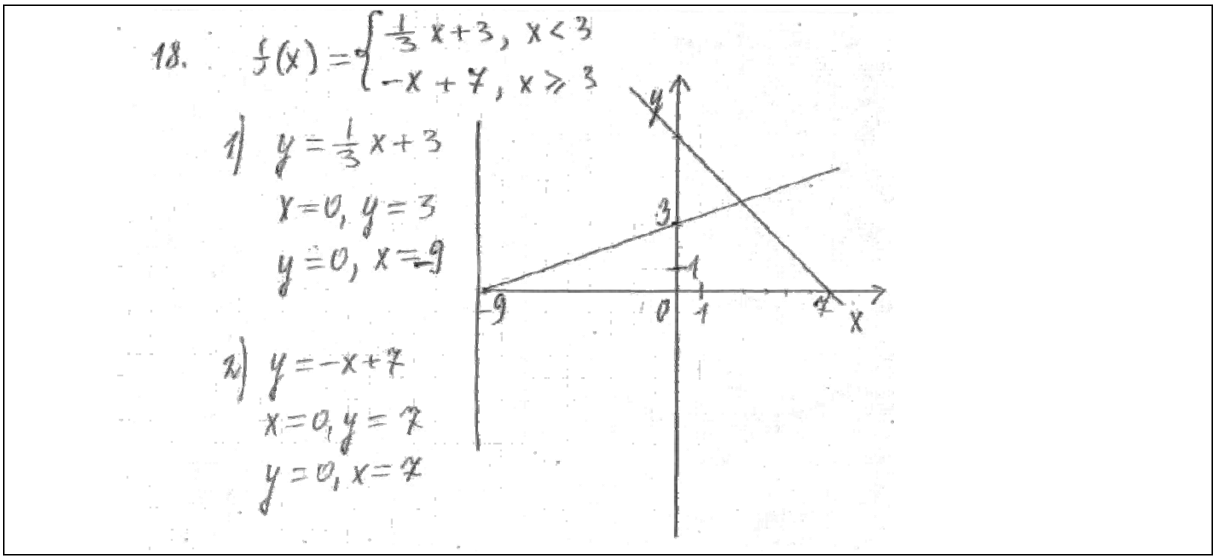
Рис. 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Правильно построен график, дан правильный ответ на вопрос.
2	Правильно построен график, но отсутствует ответ на вопрос; ИЛИ при правильно вычисленных координатах точек графика допущена неточность в построении, ответ дан с учетом этой неточности; ИЛИ при записи ответа допущена погрешность, например, вместо круглой скобки поставлена квадратная.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. 1. Отсутствие пояснений и письменных вычислений при правильном построении графика и правильном ответе на вопрос не должно служить основанием для снижения балла.
2. Ответ на вопрос задания может быть получен как путем вычислений, так и с опорой на график.
3. Ответ на вопрос может быть записан в любой правильной форме.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.



За решение выставляется 0 баллов. Учащийся должен был выделить каким-либо способом (например, жирно) собственно график заданной функции.

Пример 2.

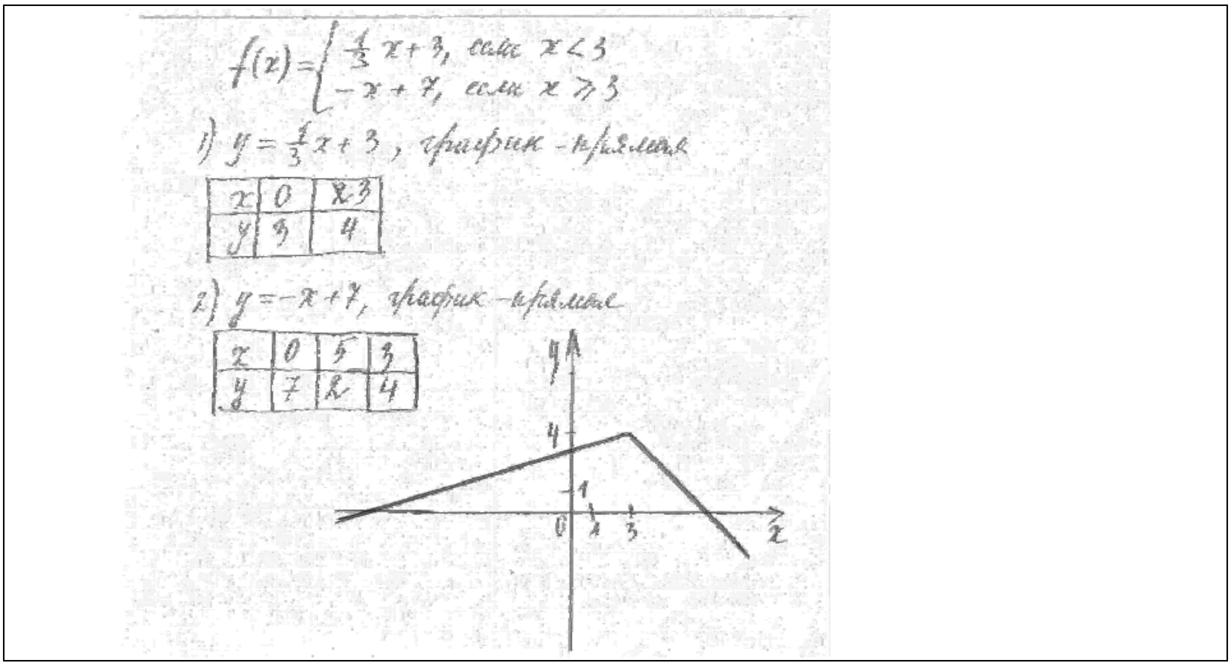


График построен правильно, отсутствует ответ на вопрос. В соответствии с критериями выставляется 2 балла.

3. *Найдите область определения выражения* $\dfrac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$.

<u>Ответ</u>: $\left[-\dfrac{7}{3}; \dfrac{7}{3}\right) \cup \left(\dfrac{7}{3}; 3\right]$.

<u>Решение</u>. Область определения выражения задается условиями $\begin{cases} 21+2x-3x^2 \ge 0, \\ 3x-7 \ne 0. \end{cases}$

Решим неравенство $21+2x-3x^2 \ge 0$: $3x^2-2x-21 \le 0$; $x_1 = -\dfrac{7}{3}$, $x_2 = 3$; $x \in \left[-\dfrac{7}{3}; 3\right]$;

Из условия $3x-7 \ne 0$ имеем $x \ne \dfrac{7}{3}$.

Отсюда $x \in \left[-\dfrac{7}{3}; \dfrac{7}{3}\right) \cup \left(\dfrac{7}{3}; 3\right]$.

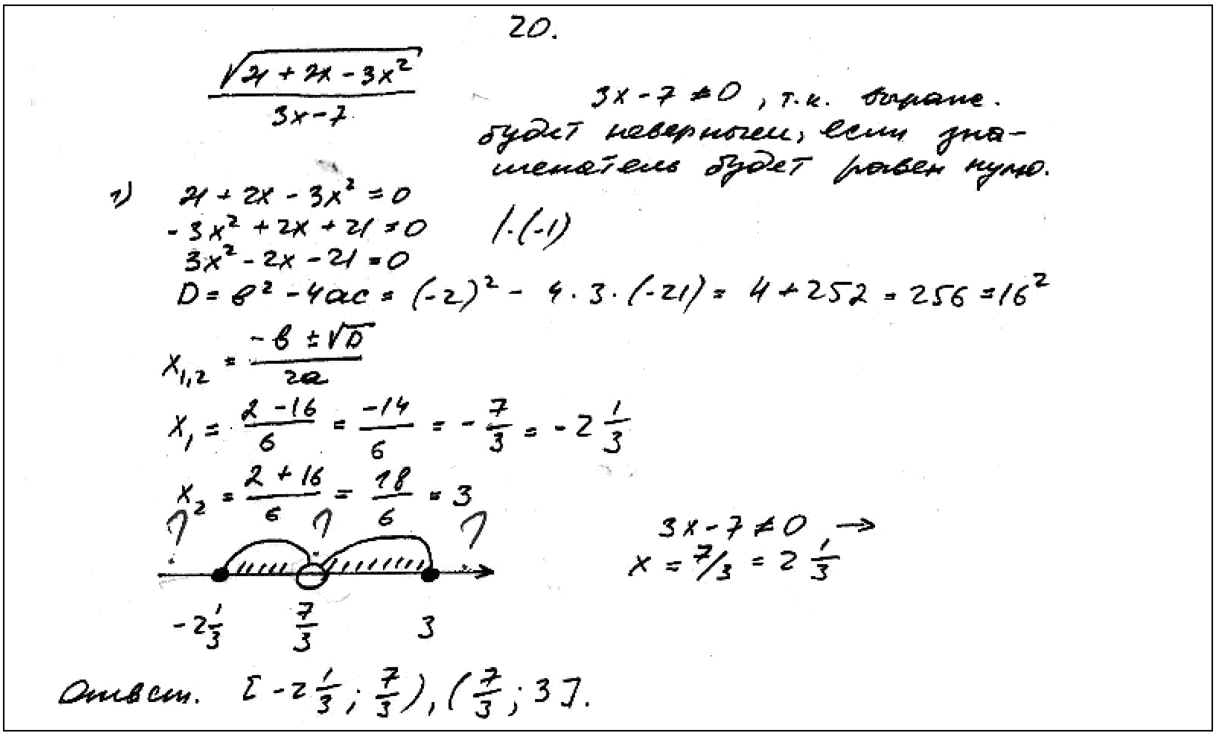
<u>Замечание</u>. Ответ может быть представлен в форме $-\dfrac{7}{3} \le x < \dfrac{7}{3}; \dfrac{7}{3} < x \le 3$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Учтены оба условия, задающие область определения данного выражения, все выкладки выполнены верно, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но допущена ошибка в символической записи ответа; ИЛИ допущена описка или ошибка вычислительного характера (например, при вычислении корней квадратного трехчлена), и с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; ИЛИ при определении области определения квадратного корня рассмотрено строгое неравенство.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

<u>Комментарий</u>. Ошибки в алгоритме решения квадратного неравенства, в применении формулы корней квадратного уравнения считаются существенными, и решение при их наличии не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1



20.

$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

$3x-7\neq 0$, т.к. выраже. будет неверным, если знаменатель будет равен нулю.

1) $21+2x-3x^2=0$

$-3x^2+2x+21=0 \quad |\cdot(-1)$

$3x^2-2x-21=0$

$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-21)=4+252=256=16^2$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{2-16}{6}=\frac{-14}{6}=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{2+16}{6}=\frac{18}{6}=3$

$3x-7\neq 0 \rightarrow$

$x=7/3=2\frac{1}{3}$

Ответ. $[-2\frac{1}{3};\frac{7}{3}),(\frac{7}{3};3]$.

За решение выставляется 2 балла. Ход рассуждений понятен, он правильный, получен верный ответ. Балл снижен за некорректное пояснение, приведенное в начале решения.

Замечание. Вопросительные знаки поставлены на схеме экспертом; мы в этом рисунке недочетов не видим.

Пример 2.

№ 20.

$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

$21+2x-3x^2 \geq 0$

$-3x^2+2x+21 \geq 0$

Рассмотрим квадратичную ф-ю $f(x) = -3x^2+2x+21$, гр. парабола ветви вниз.

нули:

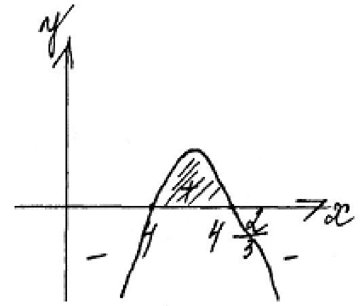
$-3x^2+2x+21=0$

$D = 4 - 4\cdot(-3)\cdot 21 = 256$

$x_1 = \frac{-2+26}{-6} = 4$

$x_2 = \frac{-2-26}{-6} =$

$= -\frac{28}{-6} = 4\frac{4}{6} = 4\frac{2}{3}$

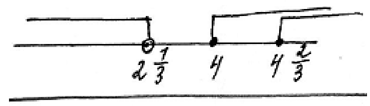


$[4;\ 4\frac{2}{3}]$.

$3x-7 \neq 0$

$3x \neq 7$

$x \neq 2\frac{1}{3}$



Ответ:

$[4;\ 4\frac{2}{3}]$; $(-\infty;\ 2\frac{1}{3})$

За решение выставляется 0 баллов; в нем содержится более одной ошибки, поэтому оно соответствует графе «Другие случаи, не соответствующие указанным критериям». Учащимся, во-первых, допущены две вычислительные ошибки при нахождении корней квадратного трехчлена; во-вторых, решив квадратное неравенство (с учетом найденных корней) и правильно наложив ограничение на знаменатель дроби, учащийся не сумел сделать на основе полученных результатов соответствующий вывод.

4. *Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии* $-8{,}6;\ -8{,}4;\ \ldots$

Ответ: $-189{,}2$.

Решение. 1. Найдем разность прогрессии: $d=-8{,}4+8{,}6=0{,}2$.

2. Найдем число отрицательных членов прогрессии.

Составим формулу n-го члена: $a_n=-8{,}6+0{,}2(n-1)=0{,}2n-8{,}8$.

Решим неравенство $0{,}2n-8{,}8<0$; получим $n<44$. Значит, $n=43$.

3. $S_{43}=\frac{(2\cdot(-8{,}6)+0{,}2\cdot 42)\cdot 43}{2}=-189{,}2$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения правильный, все его шаги выполнены верно, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но допущена одна описка или непринципиальная ошибка вычислительного характера, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. 1. Учащийся имеет право воспользоваться другой формулой суммы первых *n* членов арифметической прогрессии.

2. Ошибки в применении формул, в том числе в подстановке числовых значений в формулы, считаются существенными, решение не засчитывается и оценивается 0 баллов.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

21) Найдите сумму всех отрица-тельных членов арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; \ldots$

$a_1 = -8,6$, $d = 0,4$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_n = -8,6 + \cancel{d}\,0,4(n-1)$

$-8,6 + 0,4(n-1) < 0$

$0,4n - 9 < 0$

$n < \frac{9}{0,4} = 22,5$

$n < 22,5$, $n = 22$

$a_{22} = -8,6 + 0,4 \cdot 21 = -8,6 + 8,4 = -0,2$.

$S_{22} = \frac{-8,6 + (-0,2)}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{22}^{11} = -8,8 \cdot 11 =$

$= -96,8$

Ответ: $-96,8$

Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка (при нахождении разности арифметической прогрессии), с ее учетом решение доведено до конца. Выставляется 2 балла.

Задания 22 и 23

1. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1; \\ (x+5)(2y-1) = 0. \end{cases}$

<u>Ответ</u>: $(-5;-2)$, $(-5;1)$, $(-2,5;0,5)$. Другие возможные формы записи ответа:

$x_1 = -5,\ y_1 = -2$; $x_2 = -5,\ y_2 = 1$; $x_3 = -2,5,\ y_3 = 0,5$;

или $\begin{cases} x_1 = -5, \\ y_1 = -2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -5, \\ y_2 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -2,5, \\ y_3 = 0,5. \end{cases}$

<u>Решение</u>. На основании условия равенства произведения нулю получим:

$\begin{cases} x + 5 = 0, \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2y - 1 = 0, \\ 2y^2 + x + 2y = -1. \end{cases}$

Решим первую систему. Из первого уравнения имеем $x = -5$; подставив это значение x во второе уравнение, получим уравнение $2y^2 + 2y - 4 = 0$. Его корни: $y_1 = -2$, $y_2 = 1$.
Получаем два решения системы уравнений: $(-5; -2)$ и $(-5; 1)$.
Решив вторую систему, получим: $y = 0,5$; $x = -2,5$. Получаем еще одно решение системы уравнений: $(-2,5; 0,5)$.
Таким образом, система имеет три решения: $(-5;-2), (-5;1), (-2,5;0,5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Правильно выполнен переход от данной системы к равносильной ей дизъюнкции (совокупности) двух систем, все дальнейшие шаги выполнены верно, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, решение доведено до конца, найденные значения переменных правильно объединены в пары, но: ИЛИ допущена одна непринципиальная вычислительная ошибка (например, при нахождении корней квадратного уравнения) или описка, с ее учетом все дальнейшие шаги выполнены верно; ИЛИ допущены погрешности логического характера в употреблении символики (если она применяется).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

<u>Комментарий</u>. Ошибки при объединении найденных значений переменных в пары считаются существенными; в этом случае решение не засчитывается. Если имеется более двух вычислительных ошибок или решение не доведено до конца, то оно не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№22. $\begin{cases} 2y^2+x+2y=-1 \\ (x+5)(2y-1)=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x+5=0 \\ 2y-1=0 \end{cases}\right.$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=\frac{1}{2}=0,5 \end{cases}$ 1) $x=-5$ $2y^2-5+2y=-1$ $2y^2+2y-4=0$ $D=4-4\cdot2\cdot(-4)=4+32=36$ $\sqrt{D}=6$ $y_{1,2}=\frac{-2\pm6}{4}$ $y_1=2$ $y_2=-1$ $(-5;2)$; $(-5;-1)$.	2) $y=0,5$ $2\cdot0,25+x+2\cdot0,5=-1$ $0,5+x+1=-1$ $1,5+1=-x$ $x=-2,5$ $(-2,5;0,5)$ Ответ: $(-5;2)$; $(-5;-1)$; $(-2,5;0,5)$.

За решение выставляется 3 балла; допущены ошибки в употреблении символики.

Пример 2.

№22.

$$\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)\cdot(2y-1) = 0 \end{cases}$$

$x = -1 - 2y - 2y^2$

$(5 - 1 - 2y - 2y^2)(2y - 1) = 0$

$(4 - 2y^2 - 2y)(2y - 1) = 0$

$4 - 2y^2 - 2y = 0$	$2y - 1 = 0$
$-2y^2 - 2y + 4 = 0 \,|\, : -2$	$2y = 1$
$y^2 + y - 2 = 0$	$y_3 = \frac{1}{2}$
$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$	$x_3 = -1 - 1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$y_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$y_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x_1 = -1 - 2 - 2 = -5$

$x_2 = -1 + 4 - 8 = -5$

Проверка:

$(-5; 1)$	$(-5; -2)$	$(-2{,}5; 0{,}5)$ – не подходит
$2 - 5 + 2 = -1$	$8 - 5 - 4 = -1$	$3{,}5 - 2{,}5 + 3 \neq -1$
$(-5+5)(2-1) = 0$	$(-5+5)(-4-1) = 0$	$(-2{,}5+5)(3-1) \neq 0$

Ответ: $(-5; 1); (-5; -2)$.

За решение можно выставить 3 балла: ход решения правильный, и, по сути, верный ответ получен. Но решение содержит логическую ошибку: выполнив проверку (которая в данном случае не является составной частью решения и может служить только цели самоконтроля), учащийся допустил вычислительную ошибку и сделал неправильный вывод о наличии постороннего решения, которого в принципе в данной ситуации быть не может.

Замечание. За нерациональное решение баллы не снимаются. Хотя хотелось бы, чтобы для сильного учащегося наличие уравнения $(x+5)(2y-1)=0$ сразу же служило сигналом к попытке применить условие равенства нулю произведения. Приведенное решение показывает (и это не единичный случай), что не наработаны некоторые стандартные приемы, обязательные для подготовки сильного ученика.

2. *Из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта B вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки*?

Ответ: плот пройдет $\frac{2}{5}$ всего пути.

Решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Следовательно, скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению – в 5 раз больше скорости плота. Если плот до встречи проплыл S км, то катер – в 3 раза больше, т. е. $3S$ км. После встречи катер пройдет $3S$ км, а плот – в 5 раз меньше, т. е. $\frac{3S}{5}$ км. Всего плот пройдет $S+\frac{3S}{5}=\frac{8S}{5}$. Отношение пройденного плотом пути ко всему пути равно $\frac{\frac{8S}{5}}{4S}=\frac{2}{5}$.

Другое возможное решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Скорость сближения катера и плота равна $x + 3x = 4x$ км/ч. Встреча произошла через $\frac{AB}{4x}$ ч. За это время плот проплыл расстояние, равное $x\cdot\frac{AB}{4x}=\frac{AB}{4}$, а катер – $\frac{3AB}{4}$. Обратный путь катер пройдет за $\frac{\frac{3AB}{4}}{5x}=\frac{3AB}{20x}$ ч. Плот за это время проплывет расстояние, равное $x\cdot\frac{3AB}{20x}=\frac{3AB}{20}$, а всего он проплывет $\frac{AB}{4}+\frac{3AB}{20}=\frac{2AB}{5}$.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания**
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена одна ошибка – в преобразованиях или в вычислениях, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены правильно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№ 21

Пусть x км/ч – скорость плота

Тогда $4x$ км/ч – скорость катера в стоячей воде.

$4x + x = 5x$ – скорость катера по течению, $4x - x = 3x$ – против течения.

Плывут навстречу друг другу, скорость сближения $x + 3x = 4x$.

$\frac{s}{4x}$ ч – время до встречи.

$\frac{s}{4x} \cdot 3x = \frac{3s}{4}$ км – катер проплыл до встречи.

$\frac{3s}{4} : 5x = \frac{3s}{20x}$ ч – время на обратный путь (катер)

Всего время: $\frac{s}{4x} + \frac{3s}{20x} = \frac{8s}{20x} = \frac{2s}{4x}$ ч.

За это время плот проплыл $\frac{2s}{4x} \cdot x = \frac{2s}{4} = \frac{s}{2}$ км.

Ответ: половину пути

Ход решения верный, введены нужные обозначения, приведены пояснения, но допущена вычислительная ошибка, с ее учетом решение доведено до конца. Можно выставить 3 балла.

Пример 2.

Пусть x км/ч — скорость плота
$4x$ км/ч — скорость катера
Если плот проплыл до встречи y км, то катер в 4 раза больше, т.е. $4y$ км.
Обратно катер прошел $4y$ км по течению.
Его скорость $5x$ км/ч, т.е. в 5 раз больше, чем у плота.
Тогда плот прошел $\frac{4y}{5}$ км. Всего он проплыл $x + \frac{4y}{5} = \frac{9y}{5}$ км
Все расстояние: $y + 4y = 5y$ км.

$$\frac{\frac{9y}{5}}{5y} = \frac{9y}{25y} = \frac{9}{25}.$$

Ответ: $\frac{9}{25}$ всего пути.

При нахождении длины пути, который катер проплыл против течения, учащийся использует собственную скорость катера; решение оценивается 0 баллами.

3. *Найдите все значения a, при которых неравенство $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$ не имеет решений.*

Ответ: $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a \in (1; 3)$.

Решение.

График функции $y = x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ должен быть отрицателен.

Имеем $D_1 = (a+2)^2 - (8a+1) = a^2 - 4a + 3 < 0$.

Решив квадратное неравенство, получаем $1 < a < 3$.

Замечание. Учащийся может воспользоваться формулой дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Другое возможное решение. Найдем ординату вершины параболы y_0 и выясним, при каких значениях a выполняется неравенство $y_0 > 0$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Найден правильный способ решения, все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.
5	Найден правильный способ решения, все шаги выполнены верно, но допущена одна ошибка технического характера (вычислительная или в преобразованиях), при этом решение доведено до конца (ответ может отличаться от правильного).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки при составлении дискриминанта квадратного трехчлена или в применении алгоритма решения квадратного неравенства являются существенными, и при их наличии за решение выставляется 0 баллов.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

$x^2+(2a+4)x+8a+1 \le 0$. найти все значения a при которых решений нет.

т.е. при каких a график параболы не будет пересекать $y=0$.

$D<0$; $D=(2a+4)^2-4(8a+1)=$

$=4a^2+16a+16-32a-4=$

$=4a^2-16a+12<0$.

$a^2-4a+3<0$.

$(a-1)(a-3)<0$.

~~$a\in(-3;1)$~~ $a\in(1;3)$

Ответ: при $a\in(1;3)$

Все шаги решения выполнены верно (хотя есть погрешность в терминологии), получен правильный ответ. За решение можно выставить 4 балла.

Пример 2.

$$x^2+(2a+4)x+8a+1\le 0$$

$$\cancel{x^2}\ D=(2a+4)^2-4(8a+1)\cdot 1=$$

$$=4a^2+16a+16-32a-4=4a^2-16a+12$$

$$4a^2-16a+12\le 0$$

$$D=256-\underbrace{4\cdot 4\cdot 12}_{192}=64=8^2$$

$$a_{1,2}=\frac{16\pm 8}{16}$$

$$a_1=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

$$a_2=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$$

Ответ: при $a=\frac{3}{4}$ и $a=\frac{3}{2}$ ур-е не имеет реш-й

За решение выставляется 0 баллов. Учащийся не владеет приемом решения квадратного неравенства, допускает ошибки в применении формулы корней квадратного уравнения.

3. Материалы для самостоятельной работы экспертов по проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом

Задание 19

Сократите дробь $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

<u>Пример 1.</u>

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \frac{(x-1)(x+0,4)}{x(5x+2)} = \frac{(x-1)\cancel{(x+0,4)}}{5x\cancel{(x+0,4)}} =$$

$$= \frac{x-1}{5x}, \quad x \neq -0,4$$

<u>Пример 2.</u>

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} =$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4\cdot5\cdot2}}{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{10}$$

$$x_1 = \frac{3+7}{10} = 1$$

$$x_2 = \frac{3-7}{10} = -\frac{4}{10}\ \cancel{\frac{2}{5}} = -0,4$$

$$\frac{(x-1)(x+0,4)}{x(5x+2)}$$

Задания 20, 21

Решите неравенство $(\sqrt{19}-4,5)(5-3x)>0$.

<u>Пример 3.</u>

$\boxed{20.}$ $(\sqrt{19}-4,5)(5-3x)>0$

$(\sqrt{19})^2 = 19, \quad 4,5^2 = 20,25$

$5-3x<0, \quad$ т.к. $\sqrt{19}-4,5<0$

$-3x<-5$

$x > \frac{5}{3} = 1\frac{1}{3}$

$x > 1\frac{1}{3}$

Постройте график функции $y = f(x)$, *где*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+3, & \text{если } x<3,\\ -x+7, & \text{если } x\ge 3.\end{cases}$$

При каких значениях x функция принимает значения, меньшие 2?

<u>Пример 4</u>

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+3, & \text{если } x<3\\ -x+7, & \text{если } x\geqslant 3\end{cases}$$

При каких значениях x

$f(x) < 2$

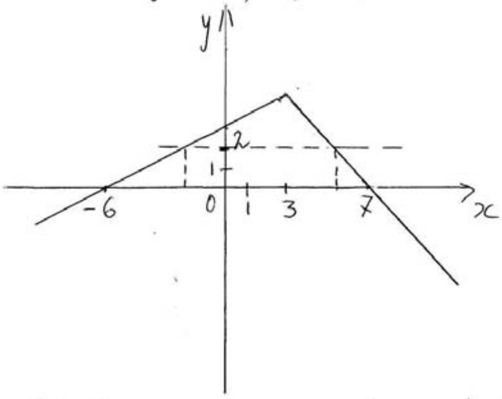
Решение

$f(x) = \frac{1}{3}x + 3$

$x = 0,\ y = 3;\ \cancel{x=}\ y = 0,\ x = -6$

$f(x) = -x + 7;$

$x = 0,\ y = 7;\ y = 0,\ x = 7.$



$f(x) < 2$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (3{,}5; +\infty)$

Найдите область определения выражения $\dfrac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$.

Пример 5.

$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

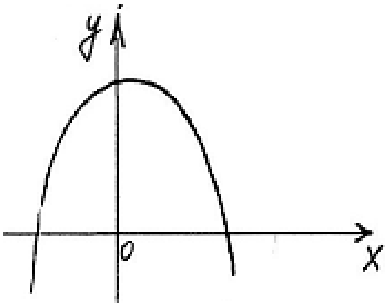
1) $\begin{cases} 21+2x-3x^2 \geq 0, \\ 3x-7 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -3x^2+2x+21 \geq 0, \\ x \neq 2\frac{1}{3}. \end{cases}$

2) Рассм. ф-цию $y=-3x^2+2x+21$.

Функция квадратичная, ветви параболы направлены вниз.

Изобразим графически.



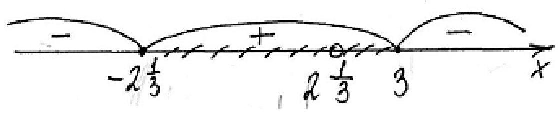
3) Найдем корни, для этого вычислим D.

$D = 4-4\cdot(-3)\cdot 21 = 4+12\cdot 21 = 4+252 = 256 = 16^2$

$x_1 = \frac{-2+16}{-6} = \frac{14}{-6} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-2-16}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$

4) $-3\left(x+2\frac{1}{3}\right)(x-3) \geq 0$



$x \in \left[-2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right); \left(2\frac{1}{3}; 3\right]$

Ответ: $x \in \left[-2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right); \left(2\frac{1}{3}; 3\right]$.

Пример 6.

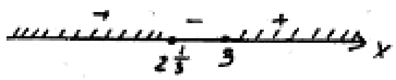
$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

$$\begin{cases} 21+2x-3x^2 \geq 0 \\ 3x-7 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(3x-7) \geq 0 \\ 3x-7 \neq 0 \end{cases}$$

Решаем каждое из неравенств методом интервалов.

1. $(x-3)(3x-7) \geq 0$



2. $3x-7 \neq 0$

$x \neq 2\frac{1}{3}$

3.

$$-3x^2+2x+21=0$$

$$3x^2-2x-21=0$$

$$D=4+4\cdot3\cdot21=256$$

$$\sqrt{D}=16$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm16}{6}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=2\frac{1}{3}$$

$$3x^2-2x-21=(x-3)(3x-7)$$

$$x\in\left(-\infty;\,2\frac{1}{3}\right)\cup[3;\,+\infty)$$

Ответ: $\left(-\infty;\,2\frac{1}{3}\right)\cup[3;\,+\infty)$

Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии – 8,6; – 8,4; …

Пример 7.

21) $a_1 = -8,6;\ a_2 = -8,4;\ d = 0,2$

$a_n = a_1 + d(n-1) = -8,6 + 0,2(n-1) =$

$= 0,2n - 8,8.$

$a_n < 0;\quad 0,2n - 8,8 < 0$

$0,2n < 8,8$

$n < 44$

$S_{22} = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \dfrac{2\cdot(-8,6) + 0,2\cdot 43}{2} \cdot 44 =$

$= (-17,2 + 8,6)\cdot 22 = -189,2$

Ответ: $-189,2$

Задания 22, 23

Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1, \\ (x+5)((2y-1) = 0. \end{cases}$

<u>Пример 8</u>.

№22

$\begin{cases} 2y^2+x+2y=-1; \\ (x+5)(2y-1)=0; \end{cases} \begin{cases} x=-2y^2-2y-1 \\ (-2y^2-2y+4)(2y-1)=0 \end{cases}$

$(-2y^2-2y+4)(2y-1)=0$

$-2y^2-2y+4=0 \;|:(-2)$

$y^2+y-2=0 \qquad x=-2y^2-2y-1$

$y_1=-2 \qquad x_1=-2\cdot(-2)^2-2(-2)-1=-5$

$y_2=1 \qquad x_2=-2\cdot 1^2-2\cdot 1-1=-5$

$2y-1=0 \qquad x_3=-2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-1=-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}-1=$

$2y=1 \qquad =-2\frac{1}{2}.$

$y_3=\frac{1}{2}$

Ответ: $(-5;-2);(-5;1);\left(-2\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Пример 9.

№ 22

$$\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)(2y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5=0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y-1=0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ 2y^2 - 5 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ 2y^2 + 2y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + x + 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \qquad y^2+y-2=0 \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x=-2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D = 1 + 4\cdot 2 = 9 \qquad \sqrt{D} = 3 \qquad y_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2} \qquad y_1=-2 \quad y_2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases} \\ \cancel{x=1} \\ \begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \begin{cases} y=0{,}5 \\ x=-2{,}5 \end{cases}$$

Ответ: $(-5;-2)$; $(-5;1)$; $(-2{,}5;\ 0{,}5)$

4. Рекомендуемая оценка решений учащихся

Пример 1. За решение выставляется 2 балла. Все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.

Пример 2. Ошибка в разложении квадратного трехчлена на множители, 0 баллов.

Пример 3. Вычислительная ошибка при делении, 2 балла.

Пример 4. При вычислении координат точек графика допущена ошибка, неверно построен график. За решение выставляется 0 баллов.

Пример 5. Ошибка в символической записи ответа; решение можно оценить 2 баллами.

Пример 6. Допущена ошибка в алгоритме решения квадратного неравенства и вычислительная ошибка при вычислении корней квадратного трехчлена. За решение выставляется 0 баллов (видно, что учащийся что-то знает, но нет твердого владения базовыми алгоритмами).

Пример 7. Неправильно определено число суммируемых членов; выставляется 0 баллов.

Пример 8. Решение оценивается 4 баллами. За нерациональное решение баллы не снимаются.

Пример 9. Допущена погрешность в употреблении символики. Решение оценивается 3 баллами.